EL GRUPO SIMPLECTICO

por

MARÍA J. WONENBURGER

Sea M un espacio vectorial a la izquierda sobre el cuerpo conmutativo K. Esto quiere decir que M es un grupo aditivo y existe una ley de composición entre los elementos de K y los elementos de M con valores en M que verifica las siguientes condiciones

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\alpha \varepsilon K$. $x, y \varepsilon M$.

2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha, \beta \varepsilon K$.

3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

Sea $f(x, y)$, $x, y \varepsilon M$, una función que toma valores en K. Se dice que esta función es bilineal si es lineal en ambas variables. Que es lineal en la primera variable quiere decir que satisface las dos relaciones

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$, $x_1, x_2, y \varepsilon M$,

2. $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$, $\alpha \varepsilon K$,

que pueden ser resumidas en la relación

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y), \ \alpha, \beta \varepsilon K, \ x_1, x_2, y \varepsilon M.$$

Analogamente la función f es lineal en la segunda variable si

$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(x, y_1) + \beta f(x, y_2).$$

Estas funciones reciben el nombre de formas bilineales.

Cuando se verifica que fijado un elemento x, $f(x, y) = 0$ para todo $y \varepsilon M$ unicamente si $x = 0$, y $f(y, x) = 0$ para todo y únicamente si $x = 0$, se dice que la forma f es no degenerada.

Dado un conjunto S de elementos de M, el conjunto de elementos tales que $f(x_0, y) = 0$ para todo $x_0 \varepsilon S$, es un subespacio de M por ser f lineal en la segunda variable. A dicho subespacio le llamamos el espacio conjugado a la derecha del conjunto S. Cuando f es no degenerada el espacio conjugado a la derecha de cualquier elemento distinto de cero es distinto de M. Como f es lineal en la primera variable el espacio conjugado a la derecha del conjunto S coincide con el espacio conjugado a la derecha del subespacio engendrado por los elementos de S.

Si determinamos los elementos z que satisfacen $f(z, x) = 0$ para todo $x \varepsilon S$, obtenemos también un subespacio de M que llamamos espacio conjugado a la izquierda del conjunto S.

Existen dos clases de formas bilineales que tienen la propiedad de que dado un conjunto cualquiera $S \subset M$ el espacio conjugado a la derecha coincide con el espacio conjugado a la izquierda, en cuyo caso, se habla simplemente de espacio conjugado del conjunto S. Esta condición se verifica si

I. f es simétrica, es decir, $f(x, y) = f(y, x)$ para todo par $x, y \varepsilon M$

II. f es alternada, lo que significa que $f(x, x) = 0$ para todo $x \varepsilon M$

De esta condición sustituyendo x por $y + z$ se deduce

$$0 = f(y + z, y + z) = f(y, y) + f(y, z) + f(z, y) + f(z, z) = \\ = f(y, z) + f(z, y)$$

o lo que es lo mismo

$$f(y, z) = -f(z, y) \text{ para todo par } y, z \varepsilon M.$$

Cuando K tiene característica 2, las funciones alternadas son un caso particular de las simericas, porque, entonces $-f(z, y) = f(z, y)$.

Si M tiene dimensión finita sobre K, sólo puede existir formas alternadas no degeneradas cuando la dimensión es par. Supongamos, pues, que M es un espacio vectorial sobre K de dimensión $2m$ y que f es una forma alternada no degenerada sobre M. Entonces existe una base $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m}$ de M, tal que para todo $i, j = 1, 2, \ldots, m$ $f(x_i, x_j) = f(x_{m+i}, x_{m+j}) = 0$, $f(x_i, x_{m+j}) = -f(x_{m+j}, x_i) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Una base de M que cumple estas condiciones se llama una base simplectica.

Dado un vector $x \varepsilon M$ el espacio conjugado de x respecto la forma alternada no degenera f, es un hiperplano que contiene a x.

Recordaremos que una transformación lineal T del espacio vectorial M en sí mismo es una transformación que cumple las siguientes condiciones, si representamos por Tz el transformado de $z \varepsilon M$ por T,

$$T(x + y) = Tx + Ty, \; x, y \varepsilon M \quad \text{y} \quad T(\alpha x) = \alpha(Tx), \; \alpha \varepsilon K.$$

Si, ademas, T es biunivoca diremos que T es un automorfismo lineal.

Entre las transformaciones lineales de M aquellas que satisfacen $f(Tx, Ty) = f(x, y)$ para todo $x, y \varepsilon M$, se llaman transformaciones simplécticas. Una transformacion simplectica T cambia el elemento $x \varepsilon M$ y su hiperplano conjugado H_x en el elemento Tx y su hiperplano conjugado, respectivamente; T cambia también una base simplectica en una base simpléctica. Como hemos supuesto que f es no degenerada Tx sólo puede ser igual a cero si $x = 0$; por tanto T es un automorfismo lineal de M y existe una transformación T^{-1} inversa de T. Esta transformación T^{-1} también es simpletica, y así mismo se verifica que el producto de dos transformaciones simplécticas es una transformación simpléctica. Resulta, pues, que estas transformaciones forman un grupo que recibe el nombre de grupo simpléctico.

Dos formas bilineales f_1, f_2 definidas sobre los espacios vectoriales sobre K, M_1, M_2, respectivamente, son equivalentes si existe un isomorfismo lineal U de M_1 sobre M_2, tal que

$$f_2(Ux, Uy) = f_1(x, y) \text{ para todo par } x, y \varepsilon M_1.$$

Si M_1 y M_2 tienen la misma dimensión, dos formas alternadas f_1 y f_2 definidas sobre M_1 y M_2, respectivamente, son siempre equivalentes. Pues, si $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ es una base simpléctica de M_1 respecto a f_1 y $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2m}$ es una base simpléctica de M_2 respecto a f_2, la transformación lineal de M_1 en M_2 definida por $Ux_h = x'_h$, $h = 1, 2, \ldots, 2m$, cumple las condiciones citadas.

Por ser equivalentes las formas simplécticas definidas sobre los espacios vectoriales sobre K de dimensión $2m$, el grupo simpléctico queda determinado salvo isomorfismo por el cuerpo K y la dimensión $2m$. Por esta razón el grupo simpléctico se designa por Sp_{2m} (K).

Se demuestra que el centro del grupo simpléctico contiene únicamente la transformación idéntica y la transformación que cambia cada elemento en su inverso. Al grupo cociente del grupo simpléctico por su centro se le llama grupo proyectivo simpléctico, y se designa por $PSp_n(K)$. Con excepción de $PSp_2(F_2)$, $PSp_2(F_3)$, $PSp_4(F_2)$, donde F_i es el cuerpo primo de característica i, los grupos proyectivos simplécticos son simples y cuando K es un cuerpo finito se puede calcular su orden. Por ejemplo, se sabe que el grupo $PSp_4(F_3)$ es de orden 25920.

Veamos ahora la relación que existe entre las formas bilineales sobre espacios de dimensión finita y las matrices. Elegida una base cualquiera $y_1, y_2, \ldots, y_n$ del espacio vectorial M, la matriz (α_{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, n$, donde $\alpha_{ij} = f(y_i, y_j)$, se llama matriz de la forma bilineal f respecto a la base dada. Dada la matriz de una forma bilineal respecto a una base, la forma queda completamente determinada, pues por ser bilineal basta conocer los valores $\alpha_{ij} = f(y_i, y_j)$ en una base para conocer el valor de $f(x, y)$, siendo x, y vectores cualesquiera. El rango de la matriz es por definición el rango de la forma y ésta es no degenerada si el rango es n, es decir, si el determinante de la matriz (α_{ij}) es distinto de cero. Si la forma f es alternada la matriz de f respecto a una base cualquiera es hemisimetrica e inversamente. Esto prueba la afirmación que hemos hecho antes de que una forma alternada no degenerada tiene dimensión par.

Si tomamos una nueva base $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y $z_i = \Sigma\, \beta_{ij}\, y_j$, la matriz de la forma f respecto a esta nueva base es $(\beta_{ij})\,(\alpha_{ij})\,(\beta_{ij})'$, siendo $(\beta_{ij})'$ la matriz traspuesta de (β_{ij}). Cuando f es una forma alternada no degenerada como M posee una base simpléctica respecto f, existe una matriz (γ_{ij}) tal que $(\gamma_{ij})\,(\alpha_{ij})\,(\gamma_{ij})' = (\varepsilon_{ij})$, siendo (ε_{ij}) la matriz simpléctica de orden $n = 2m$, es decir (ε_{ij}) expresada en bloques de orden $m \times m$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix}$$

donde O_m es la matriz cuadrada de orden m cuyos elementos son todos cero, I_m es la matriz unidad y $-I_m$ su opuesta.

Las transformaciones simpléticas son aquellas transformaciones lineales cuya matriz (μ_{ij}) respecto a la base $y_1, y_2, \ldots, y_n$ cumple la condición $(\mu_{ij})(\alpha_{ij})(\mu_{ij})' = (\alpha_{ij})$, donde (α_{ij}) es una matriz hemisimétrica. La aplicación de una transformación simplética S en la matriz $(\mu_{ij})'$, cuando (μ_{ij}) es la matriz de S respecto a la base $y_1, y_2, \ldots, y_u$ es una representación. En efecto, si (μ_{ij}) es la matriz de S y (ν_{ij}) es la matriz de T, la matriz de la transformación producto ST es $(\nu_{ij})(\mu_{ij})$; por tanto, la aplicación que acabamos de definir aplica S en $(\mu_{ij})'$, T en $(\nu_{ij})'$ y ST en $[(\nu_{ij})(\mu_{ij})]' = (\mu_{ij})'(\nu_{ij})'$.

Si hemos elegido una base simplectica resulta, entonces, que el grupo simpléctico es el grupo de matrices (β_{ij}) tales que $(\beta_{ij})'(\varepsilon_{ij})(\beta_{ij}) = (\varepsilon_{ij})$, siendo

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix}$$